

УДК 517.956

**О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ
ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
ВТОРОГО ПОРЯДКА**

С.Т.ГУСЕЙНОВ

Бакинский Государственный Университет
sarvanhuseynov@rambler.ru

В работе рассматривается задача Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка. Доказывается однозначная разрешимость W , H - задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка.

Ключевые слова: пространства Соболева W и H , модуль непрерывности, коразмерность, плотность гладких функций.

Рассмотрим в ограниченной области D евклидова пространства R^n , $n \geq 2$, уравнение

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0 \quad (1)$$

в предположении, что $\|a_{ij}(x)\|$ - действительная симметрическая матрица с измеримыми в D элементами, причём для $x \in D$, $\xi \in R^n$ выполнено условие

$$\mu |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu^{-1} |\xi|^2, \quad (2)$$

где $\mu \in (0;1]$. Здесь предполагается, что $p(x)$ - измеримая в D функция и $1 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < \infty$. Если $p(x) = const$, то квазилинейное уравнение (1) и его естественные обобщения детально изучены. Обзор литературы по таким уравнениям содержится в монографии [1].

Уравнение (1) относится к обобщённому классу эллиптических уравнений с нестандартным условием роста и является уравнением Эйлера для вариационных задач с интегрантом $\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}$.

Введём классы функций, связанных с уравнением (1). Для этого введём класс функций

$$W(D) = \left\{ u : u \in W_1^1(D), |\nabla u|^{p(x)} \in L_1(D) \right\},$$

где $W_1^1(D)$ - соболевское пространство функций, суммируемых в D вместе с обобщёнными производными первого порядка.

Сходимость в классе $W(D)$ определим следующим образом.

Последовательность функций $u_j \in W(D)$ сходится в $W(D)$ к функции $u \in W(D)$, если $u_j \rightarrow u$ в $L_1(D)$ и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_D |\Delta u - \Delta u_j|^{p(x)} dx = 0.$$

Замыкание множества функций из $W(D)$ с компактным носителем в D будем обозначать как $W_0(D)$. Из результатов работы [2] следует, что одного только предположения (3) недостаточно для плотности гладких функций в классах $W(D)$ и $W_0(D)$. В связи с этим возникают функциональные классы, порождённые гладкими функциями:

$$H(D) = \left\{ u : u \in W(D), \exists u_j \in C^\infty(D) \cap W(D), u_j \rightarrow u \text{ в } W(D) \right\},$$

$$H_0(D) = \left\{ u : u \in W(D), \exists u_j \in C_0^\infty(D), u_j \rightarrow u \text{ в } W_0(D) \right\}.$$

Функция $u \in W(D)$ называется W -решением уравнения (1), если интегральное тождество

$$\int_D \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) |\nabla u|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx = 0 \quad (3)$$

выполнено для пробных функций $\psi \in W_0(D)$.

Функция $u \in H(D)$ называется H -решением уравнения (1), если интегральное тождество (3) выполнено на пробных функциях $\psi \in H_0(D)$.

Введенные выше W -решения и H -уравнения (1) связаны с задачами Дирихле

$$Lu = 0 \text{ в } D, u \in W(D), h \in C^\infty(D), (u - h) \in W_0(D) \quad (4)$$

и

$$Lu = 0 \text{ в } D, u \in H(D), h \in C^\infty(D), (u - h) \in H_0(D), \quad (5)$$

соответственно.

Задачи Дирихле (4) и (5) были введены В.В.Жиковым в [2] под названием задач первого и второго рода. Он же заметил, что если коразмерность класса H в W больше единицы, то существуют и другие промежуточные задачи Дирихле и соответствующие им решения уравнения (1).

Исследования В.В.Жикова [3] в этом направлении привели к ограничению

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{c}{\ln \left| \frac{1}{|x - y|} \right|}, \quad x, y \in D, |x - y| < \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Уравнение с кусочно-непрерывным показателем $p(x)$ рассмотрено в [4]. В работе [5] получен критерий регулярности граничной точки винеровского типа, получена оценка модуля непрерывности решения вблизи регулярной граничной точки.

Докажем однозначную разрешимость задач (4) и (5).

Теорема. Каждая из задач Дирихле (4), (5) однозначно разрешима. Если выполнено условие (2) и (7), то рассматриваемые задачи совпадают и существует единственное решение из класса $W(D)$.

Доказательство. Рассмотрим задачу (4). Нетрудно видеть, что доказательство её разрешимости сводится к нахождению функции $w \in W_0(D)$, удовлетворяющей интегральному тождеству

$$\int_D \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) |\nabla(w + h)|^{p(x)-2} \frac{\partial}{\partial x_j} (w + h) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} dx = 0 \quad (7)$$

на пробных функциях $\psi \in W_0(D)$.

Искомым решением (8) является минимизант задачи (6). Действительно, в силу линейности класса $W_0(D)$ минимизант $w(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_D \frac{|z + t \nabla \psi|^{p(x)} - |z|^{p(x)}}{t p(x)} dx \geq 0 \quad \forall \psi \in W_0(D), t > 0, \quad (8)$$

где полагается $z = \nabla(w + h)$. Очевидно, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{|z + t \nabla \psi|^{p(x)} - |z|^{p(x)}}{t p(x)} = |z|^{p(x)-2} z \cdot \nabla \psi$$

почти всюду в D , и необходимо проверить, что здесь имеет место сходимость в $L_1(D)$. Если $t \in (0;1)$, то в силу неравенства

$$\left| |\xi|^p - |\zeta|^p \right| \leq p |\xi - \zeta| \left(|\xi|^{p-1} + |\zeta|^{p-1} \right)$$

имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{|z + t \nabla \psi|^p - |z|^p}{t p} \right| &\leq \left(|z + t \nabla \psi|^{p-1} + |z|^{p-1} \right) |\nabla \psi| \leq \\ &\leq C \left(|z|^{p-1} + |\nabla \psi|^{p-1} \right) |\nabla \psi| \leq C \left(|z|^p + |\nabla \psi|^p \right) \in L_1(D), \end{aligned}$$

и по теореме Лебега в (9) можно перейти к пределу при $t \rightarrow +0$. Отсюда вытекает, что интеграл в (9) неотрицателен для любой функции $\psi \in W_0(D)$, а потому равен нулю и тождество (9) установлено. Осталось показать единственность.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ - решение задачи (4). Из интегральных тождеств (3) для $u(x)$ и $v(x)$ с пробной функцией $\psi = (u - v) \in W_0(D)$ следует, что

$$\int_D \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u - |\nabla v|^{p(x)-2} \nabla v \right) \cdot \nabla (u - v) dx = 0. \quad (9)$$

Поскольку

$$\left| |\xi|^{p(x)} \xi - |\zeta|^{p(x)} \zeta \right| (\xi - \zeta) > 0 \quad \forall \xi, \zeta \in R^n, \xi \neq \zeta,$$

то предыдущее тождество влечет совпадение $u(x)$ и $v(x)$ почти всюду в D . Точно так же устанавливается и однозначная разрешимость задачи (5). Если выполнено условие (7), то $W(D) = H(D)$, $W_0(D) = H_0(D)$ и рассматриваемые задачи совпадают. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973, 576 с.
2. Жиков В.В. О постановке краевых задач для интегралов вида $|\xi|^{\alpha(x)}$ // УМН, 1986, т.41, №4, с.187-188.

3. Zhikov V.V. On Lavrentiev's Phenomen // Russian J. of Math. Physics, 1994, v.3, №2, p.249-269.
4. Алхутов Ю.А. О гёльдеровой непрерывности $p(x)$ -гармонических функций // Матем.сбор., 2005, т.196, №2, с.3-28.
5. Алхутов Ю.А., Крашенинникова О.В. Непрерывность в граничных точках решений квазилинейных эллиптических уравнений с нестандартным условием роста // Известия Российской Академии Наук, сер. матем., 2004, т.68, №6, с.3-60.

İKİNCİ TƏRTİB KVAZİXƏTTİ ELLİPTİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN DİRİXLƏ MƏSƏLƏSİ

S.T.HÜSEYNOV

XÜLASƏ

İşdə ikinci tərtib kvazixətti elliptik tənliklər üçün Dirixle məsələsinə baxılır. İkinci tərtib kvazixətti elliptik tənliklər üçün qoyulmuş W, H - Dirixle məsələlərinin birqiymətli həll olunması isbat olunur.

Açar sözlər: W, H Sobolev fəzaları, kəsilməzlik modulu, koölçü, hamar funksiyaların sıxlığı.

ON SOLVABILITY OF DIRICHLET PROBLEM FOR SECOND ORDER QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS

S.T.HUSEYNOV

SUMMARY

In the paper, the Dirichlet problem for second order quasilinear elliptic equations is considered. Unique solvability of Dirichlet W, H - problem for second order quasilinear elliptic equations is proved.

Key words: Sobolev spaces W, H ; modulus of continuity; co-dimensional; density of smooth functions.

Поступила в редакцию: 12.03.2011 г.

Принято к печати: 17.06.2011 г.